

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. a) (3p) Fie fracția : $\frac{1+2+3+\dots+n}{650-649+648-647+\dots+4-3+2-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât fracția să fie echiunitară.

Prof. Constantin Ciobîcă

b) (4p) Determinați numerele naturale m, n și p , nenule și distincte, știind că:

$$\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} \geq 10.$$

Prof. Dorel Ispășoiu

Soluție:

a) $650 - 649 + 648 - 647 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de 325 ori}} = 325$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Fracția devine $\frac{n \cdot (n+1)}{650}$. Ea este echiunitară dacă $n \cdot (n+1) = 650$.

$$650 = 2 \cdot 13 \cdot 5^2 = 25 \cdot 26 \Rightarrow n = 25.$$

b) Avem $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $m+1 \geq 2$, deci $\frac{4}{1+m} \leq \frac{4}{2} = 2$. De asemenea $m+n \geq 3$, deci $\frac{9}{m+n} \leq \frac{9}{3} = 3$;

$$m+n+p \geq 6, \text{ deci } \frac{30}{m+n+p} \leq \frac{30}{6} = 5$$

Adunând membru cu membru cele trei relații obținem:

$$\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} \leq 10, \text{ deci } \frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} = 10$$

Înseamnă că, în fiecare caz, trebuie îndeplinite egalitățile. Rezultă că $m = 1$, $n = 2$ și $p = 3$.

Barem:

Calculul numitorului	1p
Calculul numărătorului	1p
Determinarea lui n	1p
$m+1 \geq 2$, deci $\frac{4}{1+m} \leq \frac{4}{2} = 2$	2p
$m+n \geq 3$, deci $\frac{9}{m+n} \leq \frac{9}{3} = 3$	

$m+n+p \geq 6$, deci $\frac{30}{m+n+p} \leq \frac{30}{6} = 5$	
Adunând membru cu membru cele trei relații obținem: $\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} \leq 10$, deci $\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} = 10$	1 p
Finalizare	1 p

2. (7p) Numerele naturale a, b, m verifică relația $2a + 6b - 5m = 0$.
Arătați că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.

Gazeta Matematică nr. 3 / 2014

Soluție:

Relația dată se scrie: $2a + b + 5b = 5m$ de unde deducem că $5 \mid (2a + b)$ sau $5 \mid (2ab + b^2)$ (1)

Relația inițială se mai scrie:

$5a - 3a + 6b = 5m$ sau $5a - 3(a - 2b) = 5m$, de unde $5 \mid (a - 2b)$ sau $5 \mid (a^2 - 2ab)$ (2)

Din (1) și (2) deducem că $5 \mid (a^2 - 2ab) + (2ab + b^2)$, adică $5 \mid (a^2 + b^2)$.

Barem:

Scrierea relației sub forma $2a + b + 5b = 5m$ și deducerea $5 \mid (2ab + b^2)$	3p
Scrierea relației sub forma $5a - 3a + 6b = 5m$ și deducerea $5 \mid (a^2 - 2ab)$	3p
Finalizare: $5 \mid (a^2 - 2ab) + (2ab + b^2)$, adică $5 \mid (a^2 + b^2)$.	1p

3. Fie unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ unghiuri în jurul punctului O astfel încât $\angle AOB \equiv \angle COD$, iar $\angle AOM \equiv \angle BOC$, unde M este un punct pe bisectoarea unghiului $\angle AOD$ și fie [ON semidreapta opusă semidreptei [OM.

a) (3p) Arătați că [ON este bisectoarea unghiului $\angle BOC$.

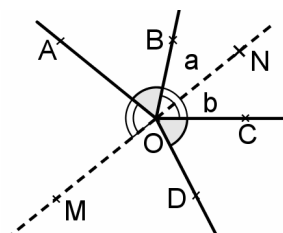
b) (4p) Determinați măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle AOD$ știind că $m(\angle DON) = 102^\circ$.

Prof. Gheorghe Iacoviță

Soluție:

- a) Notăm: $m(\angle BON) = a$ și $m(\angle CON) = b$;
 $m(\angle AOM) = m(\angle DOM) = m(\angle BOC) = x$,
 $m(\angle AOB) = m(\angle COD) = y$.

Cum [OM și [ON sunt semidrepte opuse, avem:
 $x + y + a = 180^\circ$ și $x + y + b = 180^\circ$, de unde $a = b$,
 deci [ON este bisectoarea unghiului $\angle BOC$.



- b) Din ipoteza problemei, unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O, deci $y + x + y + x + x = 360^\circ$, adică $3x + 2y = 360^\circ$ (1);

$y + \frac{x}{2} = 102^\circ$, de unde $2y + x = 204^\circ \Leftrightarrow 2y = 204^\circ - x$ (2); înlocuind (2) în (1), obținem:

$$3x + 204^\circ - x = 360^\circ; 2x = 360^\circ - 204^\circ; 2x = 156^\circ; x = 78^\circ \Rightarrow y = 63^\circ.$$

În concluzie: $m(\angle AOB) = 63^\circ$ și $m(\angle AOD) = 2x = 156^\circ$.

Barem:

a) $m(\angle BON) = a$ și $m(\angle CON) = b$; $m(\angle AOM) = m(\angle DOM) = m(\angle BOC) = x$, $m(\angle AOB) = m(\angle COD) = y$. Cum $[OM$ și $[ON$ sunt semidrepte opuse: $x + y + a = 180^\circ$ și $x + y + b = 180^\circ$.	2p
Deduce că $a = b$, deci $[ON$ este bisectoarea unghiului $\angle BOC$.	1p
b) Scrie: $3x + 2y = 360^\circ$ și $y + \frac{x}{2} = 102^\circ$	1p
Găsește x și y	2p
Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.